CPI2 (S4) (2020 – 2021)

Calcul des probabilités

Pr : M.O. Aboutafail

Plan du cours

- Chapitre 1 : Dénombrement et analyse combinatoire
- Chapitre 2 : Notion de probabilité
- Chapitre 3 : Variables aléatoires : généralités

Chapitre 1 :

Dénombrement et analyse combinatoire

1. Ensemble fini :

Définition

Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ sur E. Dans le cas contraire, E est dit infini.
Si E est fini non vide, l'entier n précédent est unique et appelé cardinal de E (nombre d'éléments de E), et noté $card(E)$ (ou $|E|$ ou $\#E$).
Par convention, $card(\emptyset) = 0$.

1. Ensemble fini :

Définition

Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ sur E. Dans le cas contraire, E est dit infini.
Si E est fini non vide, l'entier n précédent est unique et appelé cardinal de E (nombre d'éléments de E), et noté $card(E)$ (ou $|E|$ ou $\#E$).
Par convention, $card(\emptyset) = 0$.

Exemple

Pour tout $m, n \in Z$ *tel que* $m \leq n$*, on a* $card(\{m, m+1, ..., n\}) = n - m + 1$*. En effet,*
La fonction $k \longmapsto k + m - 1$ *est bijective de* $\{1, 2, ..., n - m + 1\}$ *sur* $\{m, m+1, ..., n\}$*.*

Théorème

Soient E et F deux ensembles. Si E est fini et s'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et on a : $card(E) = card(F)$.

Dénombrement et analyse combinatoire

Théorème

Soient E et F deux ensembles. Si E est fini et s'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et on a : $card(E) = card(F)$.

Théorème

Soient E un ensemble fini et A une partie de E. Alors, A est fini et on a : $card(A) \leq card(F)$ avec égalité si, et seulement si, $A = E$.

Théorème

Soient E et F deux ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Si f est injective et F est fini, alors E est fini et on a $card(E) \leq card(F)$, avec égalité si, et seulement si, f est bijective.
- Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et on a $card(F) \leq card(E)$, avec égalité si, et seulement si, f est bijective.
- Si E et F sont fini de même cardinal, alors :

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Théorème

Soient A et B deux ensembles finis.

- **Réunion** :
$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$. En particulier, si A et B sont disjoints, alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.
Plus généralement, si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints, alors $card(\bigsqcup_{k=1}^{k=n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} card(A_k)$.
- **Différence** : $card(A \setminus B) = card(A) - card(A \cap B)$. En particulier, si $B \subset A$ alors

$$card(A \setminus B) = card(A) - card(B).$$

2. Calcul du dénombrement

2.1. Principes du dénombrement

Principe de bergers :

Qaund un problème de dénombrement a été décomposé intellectuellement en deux sous-problème avec n choix possible pour l'étape 1 et p choix possibles pour chacun de ces choix dans l'étape 2, alors le problème complet offre np choix.

2. Calcul du dénombrement

2.1. Principes du dénombrement

Principe de bergers :

> Qaund un problème de dénombrement a été décomposé intellectuellement en deux sous-problème avec n choix possible pour l'étape 1 et p choix possibles pour chacun de ces choix dans l'étape 2, alors le problème complet offre np choix.

Exemple

Dans $[\![1, n]\!]$ il y a $n(n-1)$ couples (x, y) pour lesquels $x \neq y$. En effet, Construire un tel couple, c'est par exemple choisir x, puis choisir y. Il y a n valeurs possibles de x et, pour chacune de ces valeurs, il y a $n-1$ valeurs restants pour y. Donc, en tout il y a $n(n-1)$ couples possibles.

Principe des tiroirs :

> Si vous avez n **tiroirs** à disposition pour y ranger $n + k$ *objets*, alors certains tiroirs contiendront plus d'un *objet*.

Principe des tiroirs :

> Si vous avez n **tiroirs** à disposition pour y ranger $n+k$ *objets*, alors certains tiroirs contiendront plus d'un *objet*.

Exemple

Dans une classe de 20 étudiants, peut-on trouver deux personnes qui sont nées le même mois (pas forcément de la même année) ?.
Ici, les tiroirs représentent les mois de l'année et les objets les étudiants.
Seuls 12 étudiants peuvent avoir des dates de naissance différentes.

2.2. p-uplet (p-liste)

Théorème : Cardinal d'un produit cartésien

Soint $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles finis, alors

$$card(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = card(A_1) \times card(A_2) \times ... \times card(A_n).$$

En particulier, $card(A^n) = (card(A))^n$.

2.2. p-uplet (p-liste)

Théorème : Cardinal d'un produit cartésien

Soint $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'ensembles finis, alors

$$card(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = card(A_1) \times card(A_2) \times ... \times card(A_n).$$

En particulier, $card(A^n) = (card(A))^n$.

Construire un élément du produit $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, c'est choisir d'abord un élément de A_1 puis un élément de A_2.....et enfin un élément de A_n, donc le nombre des choix total est $card(A_1) \times card(A_2) \times ... \times card(A_n)$.

Définition

On appelle $p-uplet$ d'un ensemble E, tout élément de E^p (c'est à dire, toute famille de p éléments de E).

Définition

On appelle $p - uplet$ d'un ensemble E, tout élément de E^p (c'est à dire, toute famille de p éléments de E).

Dans une liste, l'ordre des éléments compte car une liste n'est jamais un ensemble (et même pas une famille), un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.
On utilise les listes pour modéliser les tirages **successifs avec remise** (car les répétitions sont autorisées).

Définition

On appelle $p - uplet$ d'un ensemble E, tout élément de E^p (c'est à dire, toute famille de p éléments de E).

Dans une liste, l'ordre des éléments compte car une liste n'est jamais un ensemble (et même pas une famille), un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.
On utilise les listes pour modéliser les tirages **successifs avec remise** (car les répétitions sont autorisées).

Exemple

Dans une jeux de 52 cartes, le nombre de façons qu'on peut tirer 4 cartes successives avec remise est 52^4.

Théorème : Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Soint E et F deux ensembles finis. On a alors,

$$card(\mathcal{F}(E,F)) = card(F)^{card(E)},$$

où $\mathcal{F}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F qui est noté aussi pat F^E.

2.3. Arrangement

2.3.1. Arrangement simple :

Définition

Un p-arrangement est une collection de p objets pris **successivement** parmi n en tenant compte de l'ordre d'apparition. Il est dit simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

2.3. Arrangement

2.3.1. Arrangement simple :

Définition

Un p-arrangement est une collection de p objets pris **successivement** parmi n en tenant compte de l'ordre d'apparition. Il est dit simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Le premier élément peut être choisi de n façons différents, le deuxième peut prendre $(n-1)$ valeurs, le troisième $(n-2)$ valeurs et le p-ième élément $(n-p+1)$ valeurs. Ainsi, le nombre d'arrangements simples est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} := A_n^p.$$

Proposition : Nombre d'injections

- Il y a A_n^p injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
- Il y a $A_n^n = n!$ bijections de E dans F où $card(E) = card(F) = n$.

Proposition : Nombre d'injections

- Il y a A_n^p injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
- Il y a $A_n^n = n!$ bijections de E dans F où $card(E) = card(F) = n$.

2.3.2. Arrangement avec répétitions :

Si les répétitions sont permises dans une arrangement, alors tous les éléments peuvent prendre n valeurs. On ait donc en train de chercher le nombre des $p-uplet$ qui égale :

$$n^p \text{ pssibilité.}$$

Proposition : Nombre d'injections

- Il y a A_n^p injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
- Il y a $A_n^n = n!$ bijections de E dans F où $card(E) = card(F) = n$.

2.3.2. Arrangement avec répétitions :

Si les répétitions sont permises dans une arrangement, alors tous les éléments peuvent prendre n valeurs. On ait donc en train de chercher le nombre des $p - uplet$ qui égale :

n^p pssibilité.

Exemple

- *Le nombre de numéros de téléphone composés de 9 chiffres est :* 10^9.
- *Le nombre de mots composés de 4 lettres est :* 26^4.

2.4. Permutations

2.4.1. Permutations simple :

Définition

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments.

2.4. Permutations

2.4.1. Permutations simple :

Définition

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments.

On peut voir une permutation de n éléments distincts (ensemble E) comme une bijection de E sur lui même. L'ensemble des pesmutations de E est appelé groupe symétrique de E.

2.4. Permutations

2.4.1. Permutations simple :

Définition

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments.

On peut voir une permutation de n éléments distincts (ensemble E) comme une bijection de E sur lui même. L'ensemble des pesmutations de E est appelé groupe symétrique de E.

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément,..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant. Donc, il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1 = n!$ permutations possibles.

2.4.2. Permutations avec répétitions : Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts. Lorsque seuls k éléments sont distincts $(k \leq n)$, chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, ..., n_k$ fois, avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, on a donc :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!} \text{ possibilité.}$$

2.4.2. Permutations avec répétitions : Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts. Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, ..., n_k$ fois, avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, on a donc :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!} \text{ possibilité.}$$

Exemple

- *Pour l'ensemble des éléments a,a,b,c il y a* $\frac{4!}{1! \times 2! \times 1!} = 12$ *permutations possibles.*
- *Avec les lettres du verbe «répéter» on peut former* $\frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420$ *anagrammes.*

2.5. Combinaisons

2.5.1. Combinaisons simple :

Définition

Une combinaison est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition. Elle est dite simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

2.5. Combinaisons

2.5.1. Combinaisons simple :

Définition

Une combinaison est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition. Elle est dite simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, et on a $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

2.5. Combinaisons

2.5.1. Combinaisons simple :

Définition

Une combinaison est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition. Elle est dite simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, et on a $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

Exemple

Une urne contient 9 boules dont 4 verts et 5 blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne, donc le nombre des cas possibles est une combinaison de 3 parmis 9, c'est à dire :
$C_9^3 = \frac{9!}{3! \times (9-3)!} = 504$.

2.5.2. Combinaisons avec répétitions : Si les répétitions sont permises, le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est :

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p! \times (n-1)!}.$$

2.5.2. Combinaisons avec répétitions : Si les répétitions sont permises, le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est :

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p! \times (n-1)!}.$$

Exemple

Le nombre de combinaisons avec répétitions de 4 chiffres choisies parmi les chiffres $\{0, 1, ..., 9\}$ *est :*

$$C_{10+4-1}^{4} = \frac{(10+4-1)!}{(10-1)! \times 4!} = 715.$$

3. Coefficients binomiaux :

Triangle de Pascal : Le triangle de Pascal se construit ligne par ligne : chaque terme est l'addition des deux nombres de la ligne supérieure qui lui sont adjacents.

	$p=0$							
$n=0$	1	$p=1$						
$n=1$	1	1	$p=2$					
$n=2$	1	2	1	$p=3$				
$n=3$	1	3	3	1	$p=4$			
$n=4$	1	4	6	4	1	$p=5$		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	$p=6$	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Proposition : Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \cdot b^{n-k}$$

Proposition : Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \cdot b^{n-k}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-p} = C_n^p, \quad C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

et

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{n+k}^n = C_{n+m}^{n+1}.$$

Théorème : Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Fin du premier chapitre